ALMOST EVERYWHERE SUMMABILITY OF FOURIER SERIES WITH INDICATING THE SET OF CONVERGENCE

R. M. TRIGUB

Abstract. The following problem is studied in this paper: Which multipliers $\{\lambda_{k,n}\}$ ensure the convergence, as $n\to\infty$, of the linear means of the Fourier series of functions $f\in L_1[-\pi,\pi]$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_{k,n}\hat{f}_k e^{ikx},$$

where $\widehat{f}_k$ is the k-th Fourier coefficient, at a point at which the derivative of the function $\int_0^x f$ exists. A criterion for the convergence of the $(C,1)$-means ($\lambda_{k,n}=(1-\frac{|k|}{n+1})_+$) is found, while in the general case $\lambda_{k,n}=\phi(\frac{k}{n+1})$ a sufficient condition is derived for the convergence at all such points (that is, almost everywhere). The answer is given in terms of the belonging of $\phi(x)$ and $x\phi'(x)$ to the Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals. The obtained results are supplemented by some examples.

1. Введение

Ряд Фурье 2π-периодической функции $f\in L_1(\mathbb{T}), \mathbb{T}=[-\pi,\pi]$, будем записывать в виде

$$f\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}_k e_k,\quad e_k=e^{ikx},\quad \widehat{f}_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt.$$

Как известно, он может расходиться всюду (А.Н. Колмогоров [1]), тогда как ряд Фурье любой функции $f\in L_p(\mathbb{T})$, $p\in(1,+\infty)$, сходится почти всюду (Л. Карлесон, Р. Хант; см. [2]). Сравнительно недавно получены существенные усиления этих результатов в их сближении (см. [3], [4]).

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 42A24; Secondary 42A38, 42A45.

Key words and phrases. Fourier series, Fourier transform, summability, Lebesgue points, d-points.

С другой стороны, уже давно изучают сходимость при $n \to \infty$ линейных средних рядов Фурье вида

$$\Lambda_n(f;x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{k,n} \widehat{f}_k e^{ikx} \tag{1}$$

в зависимости от множителей $\lambda_{k,n}$ (см. напр., [5] т. I, гл. III, [6]). Это свёртки функции f с ядрами K_n:

$$\Lambda_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt, \quad K_n(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{k,n} e^{ikt}.$$

Здесь важны вопросы о сходимости к f по норме $L_1(\mathbb{T})$ и о поточечной сходимости почти всюду.

В случае $\lambda_{k,n} = \phi(\frac{k}{n+1})$, где ϕ – ограниченная и непрерывная почти всюду на $\mathbb{R}$ функция, и сходимости по норме $L_1(\mathbb{T})$ (или $C(\mathbb{T})$) имеется следующий критерий, т.е., необходимое и достаточное условие одновременно: функция ϕ (после исправления по непрерывности) является преобразованием Фурье конечной на R комплекснозначной борелевской меры и $\phi(0) = 1$ (см. [7], 8.1.2).

А. Лебег ввёл точки x (l-точки), для которых существует $l_f(x)$ с условием

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - l_f(x)|dt = 0,$$

и доказал, что для любой функции $f \in L_1(\mathbb{T})$ почти все точки являются её точками Лебега. Кроме того, он доказал, что средние арифметические частных сумм Фурье ($(C,1)$-средние)

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} s_m(f) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\widehat{f}_k e_k, \tag{2}$$

$$s_m(f) = \sum_{k=-m}^{m} \widehat{f}_k e_k$$

сходятся к $l_f(x)$ во всех l-точках любой функции $f \in L_1(\mathbb{T})$ (см. [5], [6], [8]). Для сходимости во всех точках Лебега имеется критерий в терминах "горбатой" мажоранты модуля ядра K_n [9], а в случае $\lambda_{k,n} = \phi(\frac{k}{n+1})$ - в терминах преобразования Фурье ϕ (точнее, $\phi(0) = 1$ и ϕ принадлежит алгебре A^*, определение которой отличается от определения $A(\mathbb{R})$ (см. ниже (4)) тем, что вместо $g \in L_1$ должно быть $\operatorname{ess\,sup}_{|x|\ge t} |g(x)| \in L_1[0,+\infty)$ ([7], 8.1.3).

В настоящей статье будем изучать сходимость во всех точках x, в которых дифференцируема функция $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, т.е.

существует предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f(x+t)dt=d_f(x)\quad (d\text{-точки}). \quad (3)$$

Из сходимости во всех d-точках следует сходимость в $l-$точках ($d_f(x)=l_f(x)$), а из сходимости во всех l-точках следует сходимость по норме на всём пространстве $L_1(\mathbb{T})$ (и $C(\mathbb{T})$).

Г. Харди доказал ([10], теорема 253), что $(C,\alpha)-$ средние рядов Фурье при $\alpha>1$ сходятся во всех d-точках и отметил, что $(C,1)$-средние $\sigma_n(f)$ (см. (2)) могут и расходиться в d-точках, делая ссылку на [6]. Н.К. Бари ([8], гл. I, §49) называет статью Лебега [11], в которой есть этот результат о $\sigma_n(f)$. Автор не нашёл доказательства этого факта и получил его из следующего критерия сходимости $\sigma_n(f)$ в d-точке (см. ниже следствие 3.4).

Теорема 1.1. *Если x – d-точка функции $f\in L_1(\mathbb{T})$, а*

$$F_x(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(x+u)du,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}(\sigma_n(f;x)+s_n(F_x;0))=d_f(x)+F_x(0)=2d_f(x).$$

Более того,

$$\sigma_n(f;x)+s_n(F_x;0)-2d_f(x)=O\left(\omega(F_x;\frac{\ln n}{n})+\frac{1}{n}\right),$$

где ω – модуль непрерывности F_x на $[-\pi,\pi]$.

Кроме того, в настоящей статье доказано общее достаточное условие сходимости средних (1) во всех d-точках в случае $\lambda_{k,n}=\phi(\frac{k}{n+1})$ или, что то же самое, $\lambda_{k,\epsilon}=\phi(\epsilon k)$ ($\epsilon\searrow 0$). Для его формулировки напомним определение винеровской банаховой алгебры:

$$A(\mathbb{R})=\{f: f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-itx}dt,\quad \|f\|_A=\|g\|_{L_1(\mathbb{R})}<\infty\}. \quad (4)$$

Теорема 1.2. *Пусть вариация функции ϕ конечна ($\phi\in V$) в некоторой окрестности нуля, $\phi(0)=1$, $x\phi(x)\in L_1(\mathbb{R})$, $\phi\in A(\mathbb{R})$, а $x\phi' x\in A(\mathbb{R})\cap L_1(\mathbb{R})$. Тогда во всех d-точках любой функции $f\in L_1(\mathbb{T})$*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\phi\left(\frac{k}{n+1}\right)\widehat{f}_k e^{ikx}=d_f(x).$$

Более слабое утверждение доказано в [12]. Отметим ещё, что недавно появилась обзорная статья [13] о винеровских алгебрах.

В §2 приведены 4 леммы; доказательство теорем 1.1, 1.2 и следствий из них см. в §3. В §4 приведены новые примеры (методы суммирования Валле-Пуссена, Фейера-Джексона, Рисса, типа Абеля-Пуассона, типа Рогозинского-Бернштейна) и три замечания.

2. Вспомогательные предложения

Доказательство теоремы 1.1, приведенной во введении, основано на следующем равенстве.

Lemma 2.1.

$$2\sin\frac{t}{2}\Phi_n'(t) = 2\Phi_n(t)\cos\frac{t}{2} - D_n(t)\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\cos(n+\frac{1}{2})t + O(\frac{1}{n}),$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

а

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\cos kt = \frac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}$$

Доказательство. Получаем последовательно

$$\begin{aligned}
&2\sin\frac{t}{2}\Phi_n'(t)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k(1-\frac{k}{n+1})\cos(k-\frac{1}{2})t - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)(1-\frac{k-1}{n+1})\cos(k-\frac{1}{2})t\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(1-\frac{2k}{n+1}+\frac{1}{n+1})\cos(k-\frac{1}{2})t\\
&= \sum_{k=0}^{n}(1-\frac{2k}{n+1}-\frac{1}{n+1})\cos(k+\frac{1}{2})t,
\end{aligned}$$

а значит, это равно и среднему арифметическому последних двух сумм, т.е.,

$$\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{2k}{n+1})\cos kt + \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(\cos(k-\frac{1}{2})t - \cos(k+\frac{1}{2})t)$$

$$+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n+1})\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n+1})\cos(n+\frac{1}{2})t$$

$$= 2\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})\cos kt - \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kt$$
$$+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\cos(n+\frac{1}{2})t + O(\frac{1}{n})$$
$$= 2\cos\frac{t}{2}(\Phi_n(t)-\frac{1}{2}) - \cos\frac{t}{2}(D_n(t)-\frac{1}{2})$$
$$+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\cos(n+\frac{1}{2})t + O(\frac{1}{n})$$
$$2\cos\frac{t}{2}\Phi_n(t) - \cos\frac{t}{2}D_n(t) - \frac{1}{2}\cos(n+\frac{1}{2})t + O(\frac{1}{n}).$$

Лемма доказана.

Lemma 2.2. *Если* $\lambda_{0,n} = 1, \lim_{n\to\infty}\lambda_{k,n} = 1$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\lim_{|k|\to\infty}\lambda_{k,n} = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *и*

$$\sup_n \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Delta\lambda_{k,n}| = \sup_n \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\lambda_{k,n} - \lambda_{k+1,n}| < \infty,$$

ядра K_n *абсолютно непрерывны, а при некотором* $\delta \in (0,\pi]$ *(в обозначениях (1))*

$$\sup_n \int_{-\delta}^{\delta} |tK_n'(t)|dt < \infty,$$

то во всех d*-точках функции* $f \in L_1(\mathbb{T})$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt = d_f(x).$$

В частном случае чётного ядра K_n и $\delta = \pi$ это утверждение содержится в [10] (теорема 71) и [6]. Но доказательство, по сути, не меняется.

Переведём теперь интегральное условие леммы 2.2 в условия на коэффициенты $\{\lambda_{k,n}\}$ ядра K_n.

Lemma 2.3. *Если* $K(t) = \sum_{k\in Z}\lambda_k e^{ikt}$ *и* $\lim_{|k|\to\infty} k\lambda_k = 0$, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi}|tK'(t)|dt \le \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|K(t)|dt + \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|\sum_{k\in\mathbb{Z}} k\Delta\lambda_k e^{ikt}|dt,$$

при условии, что правая часть конечна.

Доказательство.

В силу неравенства $\frac{2}{\pi}|u| \le |\sin u|$ при $|u| \le \frac{\pi}{2}$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|tK'(t)|dt \le \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|2\sin\frac{t}{2}K'(t)|dt = \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|2\sin\frac{t}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}k\lambda_k e^{ikt}|dt =$$

$$\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|\sum_{k\in\mathbb{Z}}k\lambda_k(e^{ikt}-e^{i(k+1)t}|dt=\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Delta(k\lambda_k)e^{ikt}|dt.$$

Осталось учесть, что

$$\Delta(k\lambda_k)=k\lambda_k-(k+1)\lambda_{k+1}=k\Delta\lambda_k-\lambda_{k+1}.$$

Lemma 2.4. *Если* $f\in A(\mathbb{R})\cap L_1(\mathbb{R})$, *то преобразование Фурье* $\widehat{f}\in L_1$.

Доказательство.

Если $g\in L_1$, а преобразование Фурье

$$\widehat{g}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-ixy}dx,$$

то $\check{g}(y)=\widehat{g}(-y)$ – обратное преобразование Фурье. Если и $\widehat{g}\in L_1$, то, как известно, почти всюду

$$g=\check{\widehat{g}}=\widehat{\check{g}}.$$

Докажем, что если

$$F=\widehat{F_1},F_1\in L_1,F_1=\check{F}_2,F_2\in L_1,$$

то $F=F_2$ почти всюду.

В силу формулы умножения, применённой дважды (считаем g и $\widehat{g}\in L_1$),

$$\int_{\mathbb{R}}Fg=\int_{\mathbb{R}}\hat{F}_1g=\int_{\mathbb{R}}F_1\hat{g}=\int_{\mathbb{R}}\check{F}_2\widehat{g}=\int_{\mathbb{R}}F_2g.$$

Так что для всех таких функций g

$$\int_{\mathbb{R}}(F-F_2)g=0,$$

где $F\in C(\mathbb{R})$, а $F_2\in L_1$.

Докажем, что $F=F_2$ почти всюду на любом отрезке $[a,b]$. Для этого достаточно доказать, что $\int_a^b(F-F_2)=0$, так как тогда из равенства $\int_a^x(F-F_2)=0$ сразу следует, что производная $F-F_2=0$ почти всюду.

Для аппроксимации функции g_0, которая равна единице на $[a,b]$ и нулю вне $[a,b]$, возьмём непрерывную функцию g_n, которая равна единице на $[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]$, $g_n(a)=g_n(b)=0$ и линейная на $[a,a+\frac{1}{n}]$ и $[b-\frac{1}{n},b]$. Очевидно, что g_n и $\widehat{g}_n\in L_1$, поэтому $\int_a^b(F-F_2)g_n=0$.

Кроме того,

$$\Big|\int_a^b F\cdot(g-g_n)\Big|\le\|F\|_{C_{[a,b]}}\int_a^b|g-g_n|\le\frac{2}{n}\|F\|_{C_{[a,b]}}$$

и

$$\Big| \int_a^b F_2 \cdot (g - g_n) \Big| \le \int_a^b |F_2||(g - g_n)|$$

и учитывая ещё, что $|g - g_n| \le 1$, можно перейти к пределу при $n \to \infty$ в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Получаем, что $\int_a^b (F - F_2) = 0$, и $F = F_2$ почти всюду.

При условиях леммы 2.4 берём $F = \widehat{f}, f \in L_1$. Тогда $F_1 = f \in A(\mathbb{R})$. Поэтому $F_1 = \check{F}_2, F_2 \in L_1$. По доказанному $\widehat{f} = F = F_2 \in L_1$.

Лемма 2.4 доказана.

3. Доказательство теорем. Следствия

Доказательство теоремы 1.1, приведенной во введении.

Пусть сначала $f_0 \in L_1(\mathbb{T})$, $d_f(0) = 0$ и

$$F_0(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(u)du, \quad F_0(0) = 0, \quad F_0 \in C[-\pi, \pi]).$$

Тогда, применяя интегрирование по частям, получаем

$$\sigma_n(f_0; 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(t)\Phi_n(t)dt = \frac{1}{\pi} \Big[\frac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \int_0^t f_0(u)du \Big]_{-\pi}^{\pi} +$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(t) 2 \sin\frac{t}{2} \Phi_n'(t)dt,$$

где $F_1(t) = F_0(t)\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$. Внеинтегральный член есть $O(\frac{1}{n})$.

Применяем лемму 2.1:

$$\sigma_n(f_0; 0) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(t) \cos\frac{t}{2} \Phi_n(t)dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(t) \cos\frac{t}{2} D_n(t)dt$$

$$-\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(t) \cos(n + \frac{1}{2})tdt + O(\frac{1}{n}).$$

Теперь от F_1 вернёмся к F_0 с оценкой погрешности.

Если $h \in \mathrm{Lip}1$ на $[-\pi, \pi]$, то продолжая F_0 и h нулём на $\mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi]$, имеем при $\lambda \ne 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_0(t)h(t)e^{i\lambda t}dt = O\left(\omega(F_0; \frac{1}{|\lambda|}) + \frac{1}{|\lambda|}\right) \qquad (5)$$

(доказательство приведено ниже).

Очевидно, что функция $h(t) = (\frac{1}{2}tctg\frac{t}{2} - 1)\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}$ ограничена на $[-\pi,\pi]$, как и её производная. Поэтому, учитывая ещё ограниченность F_0 и sin, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi}(F_1(t)\cos\frac{t}{2} - F_0(t))\Phi_n(t)dt$$
$$= \frac{1}{n+1}\int_{-\pi}^{\pi}F_0(t)h(t)\sin^2(n+1)\frac{t}{2}dt = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(F_1(t)\cos\frac{t}{2} - F_0(t))D_n(t)dt$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}F_0(t)h(t)\sin\frac{t}{2}\sin(n+\frac{1}{2})tdt = O\left(\omega(F_0;\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}\right)$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi}(F_1(t) - F_0(t))\cos(n+\frac{1}{2})tdt = O\left(\omega(F_0;\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}\right).$$

Таким образом,

$$\sigma_n(f_0;0) = 2\sigma_n(F_0;0) - s_n(F_0;0) + O(\omega(F_0;\frac{1}{n}) + \frac{1}{n})$$

Оценим скорость стремления к нулю $\sigma_n(F_0;0) = \sigma_n(F_0;0) - F_0(0)$ через модуль непрерывности F_0 на $[-\pi,\pi]$.

$$|\sigma_n(F_0;0)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(F_0(t) - F_0(0))\Phi_n(t)dt\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(F_0;|t|)\Phi_n(t)dt.$$

Известно, что при $\lambda > 0$

$$\omega(f;\lambda|u|) \le (\lambda+1)\omega(f;|u|).$$

Поэтому

$$|\sigma_n(F_0;0)| \le \omega(F_0;\frac{\ln(n+1)}{n+1})\Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(n+1)|t|}{\ln(n+1)}\cdot\frac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{dt}{n+1} + 1\Big).$$

После применения в знаменателе неравенства $|u| \le \frac{\pi}{2}|\sin u|$ при $|u| \le \frac{\pi}{2}$ первое слагаемое в скобках не больше

$$\frac{\pi}{\ln(n+1)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{t}dt = \frac{\pi}{\ln(n+1)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi(n+1)}\frac{\sin^2 u}{u}du = O(1).$$

Так что

$$|F_0(0) - \sigma_n(F_0;0)| \le c\omega\left(F_0;\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right). \qquad (6)$$

Следовательно,

$$\sigma_n(f_0;0) + s_n(F_0;0) = O\left(\omega(F_0;\frac{\ln(n+1)}{n+1})\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Пусть теперь x – произвольная d-точка функции f.

Применим доказанное соотношение к функции $f_0(t) = f(x+t) - d_f(x)$. При этом

$$F_0(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(x+u)du - d_f(x).$$

Тогда

$$\sigma_n(f_0;x) + s_n(F_x;0) - 2d_f(x) = O\left(\omega(F_x;\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right) + \frac{1}{n}).$$

Осталось доказать неравенство (5).

После простых преобразований ($\|g\|_\infty = ess\sup_{[\pi,\pi]}|g(t)|$)

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty} F_0(t)h(t)e^{i\lambda t}dt\Big| = \frac{1}{2}\Big|\int_{-\infty}^{\infty}(F_0(t)h(t) - F_0(t+\frac{\pi}{\lambda}))h(t+\frac{\pi}{\lambda}))dt\Big| =$$

$$\frac{1}{2}\Big|\int_{-\infty}^{\infty}(F_0(t) - F_0(t+\frac{\pi}{\lambda})h(t)e^{i\lambda t}dt + \int_{-\infty}^{\infty}F_0(t+\frac{\pi}{\lambda})(h(t) - h(t+\frac{\pi}{\lambda}))e^{i\lambda t}dt\Big|$$

$$\leq \frac{1}{2}\|h\|_\infty\int_{-\infty}^{\infty}|F_0(t) - F_0(t+\frac{\pi}{\lambda})|dt$$

$$+\frac{1}{2}\|F_0\|_\infty\int_{-\infty}^{\infty}|h(t) - h(t+\frac{\pi}{\lambda})|dt.$$

При $\lambda > 0$, например, первый интеграл равен

$$\int_{-\pi-\frac{\pi}{\lambda}}^{\pi}|F_0(t+\frac{\pi}{\lambda})|dt + \int_{-\pi}^{\pi-\frac{\pi}{\lambda}}|F_0(t) - F_0(t+\frac{\pi}{\lambda})|dt + \int_{\pi-\frac{pi}{\lambda}}^{\pi}|F_0(t)|dt$$

$$\leq 2\|F_0\|_\infty\cdot\frac{\pi}{\lambda} + 2\pi\omega(F_0;\frac{\pi}{\lambda}).$$

При такой же оценке второго интеграла нужно ещё учесть, что $\omega(g;\frac{\pi}{\lambda}) \leq \|g'\|_\infty\frac{\pi}{\lambda}$.

Неравенство (5) доказано, а с ним и теорема 1.1.

Приведём несколько следствий.

Corollary 3.1. *Если x – l-точка функции $f \in L_1(T)$, то ряд Фурье функции $F_x(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(x+u)du$ в нуле сходится.*

Для доказательства достаточно применить теорему 1.1 и теорему Лебега, упомянутую во введении.

Corollary 3.2. *Для того чтобы $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f;x) = d_f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился в нуле ряд Фурье непрерывной функции F_x.*

Corollary 3.3. *(C,α)-средние рядов Фурье при $\alpha>1$ сходятся во всех $d-$точках.*

Для доказательства на основании теоремы 1.1 достаточно применить к предельному соотношению теоремы (C,ϵ)-средние при $\epsilon>0$. Получим

$$\lim(\sigma_n^{1+\epsilon}(f;x)+\sigma_n^{\epsilon}(F_x;0))=2d_f(x).$$

Но $F_x\in C[-\pi.\pi]$ и поэтому $\sigma_n^{\epsilon}(F_x;0)\to F_x(0)=d_f(x)$.

Этот же приём применим и в более общей ситуации.

Corollary 3.4. *Существует функция $f\in L_1(\mathbb{T})$, у которой $x=0$ является d-точкой, а $\sigma_n(f;0)=\sigma_n^1(f;0)$ при $n\to\infty$ расходится.*

Доказательство. Применяем следствие 3.2. Есть много разных примеров расходящихся рядов Фурье непрерывных функций (см. [5-8]). Нам нужна четная функция F_0 вида

$$tF_0(t)=\int_0^t f_0(u)\,du,\quad f_0\in L_1(\mathbb{T}),$$

с расходящимся в нуле рядом Фурье.

Воспользуемся примером из [6], §4.12 (см. также [8], гл. I, §46).

При $n_k=3^{k^3}$ $(k\ge 0)$ и $a_k=\frac{1}{k^{3/2}}$ $(k\in\mathbb{N})$

$$F_0(t)=a_k\sin n_k|t|\quad\Big(\frac{\pi}{n_k}\le|t|\le\frac{\pi}{n_{k-1}}\Big).$$

Поскольку $\frac{n_k}{n_{k-1}}$ – нечетное число, а $\lim_{k\to\infty}a_k\ln\frac{n_k}{n_{k-1}}=\infty$, то

$$\lim_{k\to\infty}s_{n_k}(F_0;0)=\infty.$$

Функция F_0 не только непрерывна ($F_0(0)=F_0(\pm\pi)=0$), но и имеет конечные односторонние производные в точках $\pm\frac{\pi}{n_k}$ $(k\ge 0)$. При $t>0$

$$tF_0(t)=-\int_t^{\pi}(F_0(u)+uF_0'(u))\,du.$$

Но

$$\int_0^{\pi}|uF_0'(u)|\,du=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}}ua_kn_k|\cos n_ku|\,du$$
$$\le\sum_{k=1}^{\infty}a_kn_k\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{n_{k-1}}\Big)^2<\infty.$$

Следствие 3.4 доказано.

Переходим к **доказательству теоремы 1.2**.

Применяем лемму 2.2 при $\delta=\pi$ и лемму 2.3. Функция $\phi\in C(\mathbb{R})\cap V(\mathbb{R})$, так как $A(\mathbb{R})\subset C(\mathbb{R})$ и $\phi'\in L_1(\mathbb{R})$.

Проверим, что $\phi(x) = o(\frac{1}{x})$ при $|x| \to \infty$. Действительно,

$$\phi(x) = -\int_x^{+\infty \cdot \mathrm{sign} x} \phi'(t)dt = -\int_x^{+\infty \cdot \mathrm{sign} x} t \cdot \frac{1}{t}\phi'(t)dt,$$

а из условия $x\phi'(x) \in L_1(R)$ следует, что

$$|\phi(x)| \le \frac{1}{|x|}\int_{|x|}^{\infty} t(|\phi'(t) + |\phi'(-t)|)dt = o\left(\frac{1}{x}\right). \tag{7}$$

Для оценки сверху интеграла от модуля ряда Фурье есть много результатов (см., например, [7], п. 7.2). Воспользуемся следующей теоремой из [12] (теорема 8): если $\sum \psi(k)e_k$ – ряд Фурье функции Ψ, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Psi(t)|dt = \min_{\psi_c} \|\psi_c\|_A,$$

где ψ_c – любая непрерывная функция с условием $\psi_c(k) = \psi(k)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Учитывая, что при $\lambda \neq 0$ выполняется $\|f(\lambda \cdot)\|_A = \|f(\cdot)\|_A$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_k \phi\left(\frac{k}{n+1}\right)e^{ikt}\right|dt$$

$$\le \|\phi((n+1)^{-1}\cdot)\|_A = \|\phi(\cdot)\|_A = \|\phi\|_A.$$

Для такой же оценки второго интеграла в лемме 2.3 положим

$$k\Delta\lambda_{k,n} = \phi_n(\frac{k}{n+1}), \quad \phi_n(x) = nx(\phi(x) - \phi(x + \frac{1}{n})).$$

Нужно доказать, что

$$\phi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(y)e^{-ixy}dy, \quad \sup_n ||\phi_n||_A = \sup ||g_n||_{L_1} < \infty. \tag{8}$$

Из того, что $\phi \in A(\mathbb{R})$, следует, что

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ixy}dy, \quad g \in L_1(\mathbb{R}).$$

Но тогда

$$\phi_n(x) = nx\int_{-\infty}^{\infty} g(y)(1 - e^{-\frac{iy}{n+1}})e^{-ixy}dy. \tag{9}$$

По формуле обращения (g и ее преобразование Фурье принадлежат L_1)

$$g(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)e^{ixy}dx$$

почти всюду, а можно считать и всюду на $\mathbb{R}$. В силу леммы Римана-Лебега $\lim_{|y|\to\infty} g(y) = 0$. Учитывая теперь, что по условию теоремы $x\phi(x) \in L_1(\mathbb{R})$, получаем

$$g'(y) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x\phi(x)e^{ixy}dx,$$

а после интегрирования по частям (см. ещё (7))

$$yg'(y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\phi(x) + x\phi'(x))e^{ixy}dx. \tag{10}$$

После интегрирования по частям в (9) имеем

$$\phi_n(x) = -in\int_{-\infty}^{\infty}\left[g'(y)(1 - e^{-\frac{iy}{n+1}}) + g(y)\frac{i}{n}e^{-\frac{iy}{n+1}}\right]e^{ixy}dy.$$

Учитывая , что $|e^{ix} - 1| \leq |x|$, приходим к выводу (см. ещё (8)):

$$\|\phi_n\|_A \leq \int_{-\infty}^{\infty}(|yg'(y)| + |g(y)|)dy.$$

Осталось доказать, что $yg'(y) \in L_1(\mathbb{R})$.

Воспользуемся леммой 2.4. Достаточно применить эту лемму к функции $\phi(x) + x\phi'(x)$ (см. (10)). Теорема 1.2 доказана.

Применяя признак Зигмунда ([5], т. I, гл. VI, (3.6), см. также [7], 6.4.3), получаем

Corollary 3.5. *Если* $\phi \in C(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $\phi(0) = 1$, $\operatorname{supp}\phi \subset [-1, 1]$, *а* $\phi(x)$ *и* $x\phi'(x) \in V \cap \operatorname{Lip}\epsilon, \epsilon > 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{|k|\leq n}\phi\left(\frac{k}{n+1}\right)\widehat{f}_k e^{ikx} = d_f(x).$$

4. Примеры. Замечания

Пример 1.

Ядро Фейера-Джексона $K_n(t) = \gamma_{s,n}D_n^s(t)$, $\int_{-\pi}^{\pi} K_n = 2\pi$, удовлетворяет условиям леммы 2.2 при любом натуральном $s \geq 3$.

Эта лемма применима и в случае, когда при некотором $\delta \in (0, \pi]$ производная ядра K_n при любом $n \in N$ сохраняет знаки на $[0, \delta]$ и $[-\delta, 0]$. Тогда на $[0, \delta]$, например,

$$\int_0^\delta t|K_n'(t)|dt = \left|\int_0^\delta tK_n(t)dt\right| = \left|\delta K_n(\delta) - \int_0^\delta K_n(t)dt\right|$$

$$\leq c\sup_n\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\Delta\lambda_{k,n}| + \sup_n\int_0^\delta|K_n(t)|dt.$$

А если к тому же есть сходимость на $L_1(\mathbb{T})$, то нормы операторов Λ_n, равные $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(t)|dt$, ограничены.

Пример 2.

Средние Валле-Пуссена (см., например, [10], 4.17)

$$\Lambda_n(f;x) = \gamma_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cos^n \frac{t}{2} lt, \quad \Lambda_n(1:x) \equiv 1$$

сходятся во всех $d-$точках.

Пример 3.

Функция $\phi(x) = e^{-|x|^\alpha}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2 при любом $\alpha > 0$. Ранее сходимость в $d-$точках была известна лишь при $\alpha = 1$ (метод Абеля-Пуассона) и $\alpha = 2$ (см. [10], п.3 приложения II).

Пример 4.

Рассмотрим $\varphi(x) = (1-|x|^\alpha)_+^\beta$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ (средние Рисса). Сходимость в d-точках имеет место при любом $\alpha > 0$, но только при $\beta > 1$.

При $\beta > 1$ применяем следствие 3.5. При $\beta = 1$ то же следствие применяем к разности

$$(1-|x|^\alpha)_+ + \alpha(1-|x|)_+.$$

Но для $(C,1)$ нет сходимости во всех d-точках для всех $f \in L_1(\mathbb{T})$ (см. следствие 3.4). Следовательно, и здесь нет. А если бы такая сходимость была при $\beta < 1$, то она была бы и при $\beta = 1$ (см. соответствующую теорему для произвольных числовых рядов в [10], теорема 58).

Пример 5 (метод типа Рогозинского-Бернштейна).

Рогозинский изучал равномерную сходимость при $n \to \infty$ средних

$$\frac{1}{2}\Big(s_n\Big(f;x+\frac{\pi}{2n}\Big) + s_n\Big(f;x-\frac{\pi}{2n}\Big)\Big) \quad \Big(s_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e_k\Big),$$

а С.Н. Бернштейн – близких по идее средних

$$\frac{1}{2}\Big(s_n(f;x) + s_n\Big(f;x+\frac{\pi}{n}\Big)\Big).$$

При сравнении скорости сходимости (по норме) их аппроксимативные свойства оказались разными: в первом случае точный порядок приближения $\omega_2(f;\frac{1}{n})$ (модуль гладкости второго порядка), во втором – $\omega(f;\frac{1}{n})$ (см., например, [7], 8.5.1).

Рассмотрим общие средние типа Рогозинского–Бернштейна

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_n(f; x-\varepsilon\gamma t)\, d\mu(t) = \sum_{|k|\le\frac{1}{\varepsilon}} \varphi(\varepsilon k)\hat{f}_k e^{ikx},$$

где при $|x| \le 1$

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\gamma xt} d\mu(t), \quad \gamma\in\mathbb{R},\ \varphi(x) = 0\ (|x|\ge 1),\ \varphi(0) = 1,$$

а μ – конечная на $\mathbb{R}$ комплекснозначная мера (см. пример III после 8.1.4 в [7]).

В силу теоремы 1.2, если еще $\varphi'(\pm 1) = 0$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^2 |d\mu(t)| < \infty,$$

то имеем сходимость во всех d-точках. Если же не выполняется условие $\varphi'(\pm 1) = 0$, то применяем теорему к разности

$$\varphi(x) - \frac{1}{2}(\varphi'(1)-\varphi'(-1))(1-|x|)_+ - \frac{1}{2}(\varphi'(1)+\varphi'(-1))(1-|x|)_+ \operatorname{sign} x.$$

Для четных функций f нужна информация о поведении средних арифметических $\sigma_n(f)$ (см. следствие 3.4), а для нечетных функций известно, что если 0 – точка Лебега, то для всех $f \in L_1(\mathbb{T})$ с условием $\int_{\to 0}^{\pi} \frac{f(t)}{t}\, dt = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f,0) = \infty$ (см. [5], т. I, гл. III, (3.20)). А средние Рогозинского (финитная функция $\varphi(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$, $|x|\le 1$) и средние Бернштейна (финитная функция $\varphi(x) = \cos^2\frac{\pi x}{2} + \frac{i}{2}\sin \pi x$, $|x| \le 1$) сходятся во всех точках Лебега, так как $\sup_{|y|\ge x} |\hat{\varphi}(y)| \in L_1(\mathbb{R}_+)$ (см. 8.1.3 в [7]), но не всегда – в d-точках. Если же применить к ним еще средние Рисса при $\alpha > 0, \beta > 0$, то получим сходимость во всех d-точках.

Замечание 1.

В дополнение к лемме 2.1 приведём ещё несколько равенств, которые можно применить, например, к сопряжённым рядам Фурье.

При

$$\tilde{D}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt, \quad \tilde{\Phi}_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \tilde{D}_k(t)$$

1)

$$2\sin\frac{t}{2}\tilde{\Phi}_n'(t)$$
$$= -2\cos\frac{t}{2}\tilde{\Phi}(t) + \cos\frac{t}{2}\tilde{D}_n(t) - \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin(n+\frac{1}{2})t + O(\frac{1}{n}).$$

2)

$$(1-e^{-it})\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})ke^{ikt}$$
$$=(1+\frac{1}{n+1})\sum_{k=0}^{n}e^{ikt}-2\sum_{k=0}^{n}(1-\frac{k}{n+1})e^{ikt},$$

3)

$$(1-e^{it})\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})ke^{ikt}$$
$$=-(1-\frac{1}{n+1})\sum_{k=1}^{n+1}e^{ikt}+2\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})e^{ikt}.$$

Замечание 2 (о признаке Салема равномерной сходимости рядов Фурье).

Применим теорему 1.1 к периодическим функциям из $C(\mathbb{T})$ $(d_f(x)=f(x))$. Так как

$$F_x(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(x+u)du=\int_0^1 f(x+tu)du,$$

то

$$\omega(F_x;h)=\sup_{-\pi\le t\le t+\delta\le t+h\le\pi}|F_x(t)-F_x(t+\delta)|$$
$$\le\omega(f;h)=\sup_{0<\delta\le h,t\in T}|f(t)-f(t+\delta)|.$$

Получаем, учитывая ещё (6),

$$\sup_{x\in\mathbb{T}}|f(x)-s_n(F_x;0)|=O\left(\omega(f;\frac{\ln n}{n})+\frac{1}{n}\right).$$

Это некоторая связь между скоростью сходимости ряда Фурье функции f и проинтегрированной функции.

А в силу признака Салема (см. [5], гл. IV, §7), если $f\in C(\mathbb{T})$ и $\hat{f}_0=0$, а $F(x)=\int_0^x f$, то при $n\to\infty$

$$\|F-s_n(F)\|_\infty=o(\frac{1}{n})\Longrightarrow\|f-s_n(f)\|_\infty=o(1).$$

На самом деле, верно и обратное утверждение, т.е., имеем критерий равномерной сходимости рядов Фурье (сформулирован в [7], 2.5.12). Для доказательства этого достаточно применить

известное неравенство Бора-Бернштейна (см., например., 5.5.2 в [7] при $r = 1$):

$$\|F - s_n(F)\|_\infty \le \frac{\pi}{2n+2}\|f - s_n(f)\|_\infty.$$

Если же придерживаться доказательства Салема (см. там же в [8]), то получаем следующий критерий сходимости в точке ряда Фурье непрерывной функции:

$$f(x) - s_n(f;x) = o(1) \iff F(x+\frac{\pi}{2n}) - s_n(F;x+\frac{\pi}{2n}) = o(\frac{1}{n}).$$

Действительно, равномерно по $x \in T$ (см. [8], гл. IV, (7. 4)) при $h = \frac{\pi}{2n}$

$$\frac{1}{2}(s_n(F;x+\frac{\pi}{2n}) - s_n(F;x) - \frac{\pi}{2n}f(x) = \frac{1}{n}(s_n(f;x) - f(x)) + o(\frac{1}{n}). \quad (11)$$

Учтём теперь, что при $f(x) = F'(x) \in C(\mathbb{T})$

$$\frac{\pi}{2n}f(x) = \frac{1}{2}(F(x+\frac{\pi}{2n}) - F(x-\frac{\pi}{2n})) + o(\frac{1}{n}) \quad (12)$$

и

$$\omega_2(F;h) \le h\omega(F';h) = h\omega(f;h) = o(h).$$

Но тогда

$$F(x) - \frac{1}{2}(F(x+\frac{\pi}{2n}) + F(x-\frac{\pi}{2n})) = o(\frac{1}{n}) \quad (13)$$

и (см. ещё точный порядок приближения в примере 5)

$$\frac{1}{2}(s_n(F;x+\frac{\pi}{2n}) + s_n(F;x-\frac{\pi}{2n})) - F(x) = o(\frac{1}{n}). \quad (14)$$

Складывая равенства (11)-(14) и умножая сумму на (-1), получаем

$$F(x+\frac{\pi}{2n}) - s_n(F;x+\frac{\pi}{2n}) = \frac{1}{n}(f(x) - s_n(f;x)) + o(\frac{1}{n})$$

(здесь можно $+\frac{\pi}{2n}$ заменить на -$\frac{\pi}{2n}$.)

Замечание 3 (о необходимом условии суммируемости).

Для сходимости на всём пространстве $L_1(\mathbb{T})$ средних

$$\Lambda_n(x) = \sum_{|k|\le n} \lambda_{k,n}\hat{f}_k e^{ikx}$$

(тем более, для сходимости в l-точках и d-точках) необходима ограниченность норм операторов Λ_n:

$$\sup_n \int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{-n}^{n} \lambda_{k,n} e^{ikt}| dt < \infty.$$

Сидон доказал, что при некотором числе $c>0$ при всех n и $\lambda_{k,n}$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sum_{-n}^{n}\lambda_{k,n}e^{ikt}|dt \geq c\sum_{-n}^{n}\frac{|\lambda_{k,n}|}{n-|k|+1}.$$

Приведём это доказательство, основанное на известном неравенстве Харди-Литтльвуда. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sum_{-n}^{n}\lambda_{k}e^{ikt}|dt = \int_{-\pi}^{\pi}|\sum_{0}^{2n}\lambda_{k-n}e^{ikt}|dt$$
$$\geq c_1\sum_{k=0}^{n}\frac{|\lambda_{k-n}|}{k+1} = c_1\sum_{k=-n}^{0}\frac{|\lambda_{k,n}|}{n-|k|+1}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sum_{-n}^{n}\lambda_{k}e^{ikt}|dt = \int_{-\pi}^{\pi}|\sum_{-n}^{n}\lambda_{-k}e^{ikt}|dt$$
$$\geq c_1\sum_{k=-n}^{0}\frac{|\lambda_{-k,n}|}{n-|k|+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{|\lambda_{k,n}|}{n-|k|+1}.$$

Соединяя эти два неравенства, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sum_{-n}^{n}\lambda_{k,n}e^{ikt}|dt \geq \frac{1}{2}c_1\sum_{-n}^{n}\frac{|\lambda_{k,n}|}{n-|k|+1},$$

где c_1 – константа из неравенства Харди-Литтльвуда.

Но уже получено более сильное неравенство ([14]):

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sum_{1}^{\infty}\lambda_{k}e^{ikt}|dt \geq c_2\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{2^{s-1}\leq\nu<2^s}\frac{|\lambda_\nu|^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, можно получить более сильное необходимое условие для сходимости по норме в $L_1(\mathbb{T})$ и $C(\mathbb{T})$.

Заметим теперь, что интегральное условие леммы 2.2 не является необходимым для сходимости в d-точках. Для доказательства этого рассмотрим метод суммирования Лебега

$$\Lambda_n(f;x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k\epsilon_n}{k\epsilon_n}\hat{f}_k e^{ikx} \quad (\epsilon_n\to 0).$$

(см. [8]). Ядро

$$K_n(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\epsilon_n}{k\epsilon_n} e^{ikt}$$

неотрицательно, так как (воспользуемся ещё раз теоремой 8 из [12])

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)|dt$$
$$\le \left\| \frac{\sin x\epsilon_n}{x\epsilon_n} \right\|_A = \left\| \frac{\sin x}{x} \right\|_A = \left\| \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ixy}dy \right\|_A = 1.$$

Суммируемость имеем не только на $L_1(\mathbb{T})$, но и в d-точках, так как

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(f;x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x+\epsilon_n) - F(x-\epsilon_n)}{2\epsilon_n} = d_f(x).$$

Продифференцированный ряд K_n не является рядом Фурье, так как его коэффициенты не стремятся к нулю. Поэтому ядро не может быть абсолютно непрерывным. Кроме того, этот ряд в силу теоремы Кантора-Лебега (см. [5], [8]) расходится почти всюду.

Укажем теперь простое необходимое условие.

Если средние рядов Фурье, определяемые ядром K_n, сходятся в d-точке

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h g(t)dt = 0, \quad \limsup_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h |g(t)|dt > 0$$

($d_g(0) = 0$ и 0 не является l-точкой), то при любом $\delta \in (0,\pi]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta g(t)K_n(t)dt = 0.$$

В качестве такой функции g возьмём, например, следующую. Пусть $\{x_s\}_0^\infty$-положительная последовательность, убывающая к нулю, а $x_0 = \pi$. Полагаем $g(t) = (-1)^s$ при $t \in (x_{s+1}, x_s]$ и $g(t) = 0$ при $t \in [-\pi, 0]$.Легко проверить, что $d_g(0) = 0$ в том и только в том случае, когда $\lim \frac{x_{s+1}}{x_s} = 1$. Следовательно, для всех ядер из примеров 1-5, приведенных выше, при любой такой последовательности и $\delta \in (0,\pi]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \int_{x_{s+1}}^{x_s} K_n(t)dt = 0.$$

References

[1] A. Kolmogoroff, *Une serie de Fourier-Lebesgue divergente partout*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.I **183** (1926), 1327–1329.

[2] R. A. Hunt, *On the convergence of Fourier series*, Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967), Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill, 1968, 235–255.

[3] С.В. Конягин. О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье. Матем. сб., 191:1 (2000), 103–126 (Russian). - English transl. in S.V. Konyagin, "On everywhere divergence of trigonometric Fourier series", Sb. Math. 191:1 (2000), 97–120.

[4] N.Yu. Antonov, *Convergence of Fourier series*, East J. Appr., 2:2 (1996), 187-196.

[5] A. Zygmund, *Trigonometric series*, v.I, II. 2nd ed. Cambridge Univ. Press. N-Y, 1959, xii+383p.p., vii+354p.p.

[6] G.H. Hardy and W.W. Rogosinski, *Fourier series*, 2nd ed. Cambridge Tracts in Mathematics end Mathematical Physics, 38, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1950, x+100 p.p.

[7] R. Trigub and E. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Kluwer-Springer, 2004.

[8] N.K. Bari, A Treatise in Trigonometric series, Fizmatqiz, Moscow (Russian). - English transl. in Pergamon Press, Mac. Millan, N-Y, 1964.

[9] Д.Л. Фаддеев, *О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Lebesque'a*, Матем. сб., I (43) (1936), 351–368 (Russian).

[10] G.H. Hardy, *Divergent series*, Oxford, 1949.

[11] H. Lebesgue, *Recherches sur la convergence des series de Fourier*, Math. Ann. Berlin-Göttingen-Heidelberg **61** (1905), 251–280.

[12] Р.М. Тригуб, Суммируемость тригонометрических рядов Фурье в d-точках, Изв. РАН, с.м., 79:4 (2015) (Russian).

[13] E. Liflyand, S. Samko, and R. Trigub, *The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overview*, Anal. Math. Phys. **2** (2012), 1–68.

[14] R.M. Trigub, *A Lower Bound for the L_1-norm of Fourier Series of Power Type*, Mat. Zametki **73** (2003), 951–953 (Russian). - English transl. in Math. Notes *73* (2003), 900–903.

E-mail address: `roald.trigub@gmail.com`